Prüfungsaufgabe 1999/1

Die Punkte P_1 (-2 / -7) und P_2 (3 / -2) liegen auf der Parabel p_1 mit $y = -x^2 + b_1 x + c_1$. Eine weitere, ebenfalls nach unten geöffnete Parabel p_2 mit $y = -x^2 + b_2x + c_2$ hat den Scheitelpunkt S_2 (-2 / -1).

a) Stellen Sie die Funktionsgleichungen von p_1 und p_2 in Normalform auf.
b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts T der beiden Parabeln.
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts S_1 von p_1.
d) Ermitteln Sie rechnerisch die Schnittstellen von p_1 mit der x-Achse.
Hinweis: Runden Sie auf eine Dezimalstelle.
e) Zeichnen Sie beide Parabeln in ein Koordinatensystem.

a) Funktionsgleichungen von p_1 und p_2 in Normalform:

Funktionsgleichung Parabel p_1:

Lösungsschema Parabel p_1: Einsetzen der Koordinatenpunkte in die allgemeine Funktionsgleichung

Funktionsgleichung allgemein: $y = -x^2 + b_1 x + c_1$.

Funktionsgleichung I:

$-7 = -(-2)^2 + b \cdot (-2) + c$
$-7 = -4 - 2b + c$
$-3 = -2b + c$
$\underline{c = 2b - 3}$

Funktionsgleichung II:

$-2 = -3^2 + b \cdot 3 + c$
$-2 = -9 + 3b + c$
$\underline{7 = 3b + c}$

Einsetzen I in II:

$7 = 3b + 2b - 3$
$7 = 5b - 3 \qquad / +3$
$10 = 5b \qquad / :5$
$\underline{2 = b}$

Einsetzen in I:

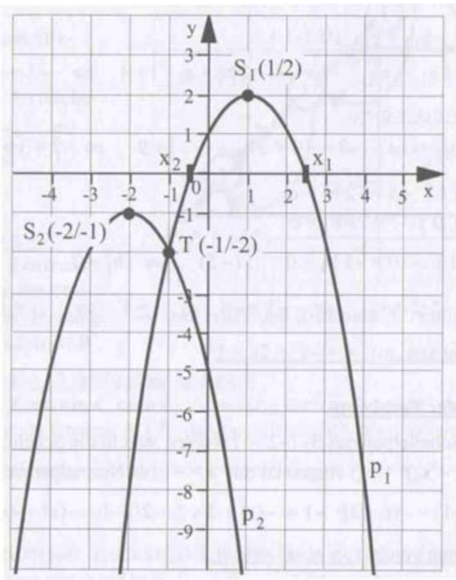
$c = 2 \cdot 2 - 3$
$\underline{c = 1}$

Funktionsgleichung: $\underline{y = -x^2 + 2x + 1}$

Funktionsgleichung Parabel p_2:

Lösungsschema: Einsetzen des Scheitelpunktes in die Scheitelpunktsform (! nach unten geöffnet)

Scheitelpunktform allgemein: $y = -(x - x_s)^2 + y_s$
Einsetzen der Koordinaten: $y = -(x+2)^2 - 1$
$y = -x^2 - 4x - 4 - 1$
Funktionsgleichung p_2: $\underline{y = -x^2 - 4x - 5}$



b) Koordinaten des Schnittpunkts T der beiden Parabeln.

Lösungsschema: Gleichsetzen der Funktionsgleichungen

$-x^2 + 2x + 1 = -x^2 - 4x - 5 \qquad / +x^2 + 4x + 5$
$6x + 6 = 0 \qquad / :6$
$x + 1 = 0$
$x = -1$ → Einsetzen in die Funktionsgleichung : T (-1 / -2)

c) Koordinaten des Scheitelpunkts S_1 von p_1.

Lösungsschema: Umformen in Scheitelpunktform mit quadrat. Ergänzung

$y = -x^2 + 2x + 1$
$y = -[x^2 - 2x - 1]$
$y = -[x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 - 1]$
$y = -[(x-1)^2 - 2]$
$y = -(x-1)^2 + 2$

Ablesen des Scheitelpunktes aus der Scheitelpunktform : $\underline{S_1 (1 / +2)}$

d) Schnittstellen von p_1 mit der x – Achse (= Nullstellen):

Lösungsschema: Nullstellen = Schnittpunkt mit der x- Achse, d.h. y = 0.

$0 = -x^2 + 2x + 1$
$0 = x^2 - 2x - 1$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 1}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 1{,}41$$

$\underline{x_1 = 2{,}41}$ → N_1 (2,41 / 0)
$\underline{x_2 = -0{,}41}$ → N_2 (- 0,41 / 0)